ΛΥΣΕΙΣ (ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, 11/2/2022)

i) $x_n \xrightarrow{n} s$, αν $\forall \varepsilon>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$ να ισχύει $|x_n - s| < \varepsilon$

ii) Ισχυρισμός: $x_n = 2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n} 2$

Πράγματι, έστω $\varepsilon>0$.

Τότε,

$$|x_n - 2| = \left|2 + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon, \text{ αν.ν}$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon^2}$$

Αρκεί λοιπόν να επιλέξουμε $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$

Τότε, $\forall n \geq n_0$ ισχύει $|x_n - 2| < \varepsilon$. $\square$

Θέμα 2

i) Έστω $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Απ' την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς, υπάρχει $q_1 \in (a-1, a)$.

Απ' την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς, υπάρχει $q_2 \in (a-\frac{1}{2}, a)$

⋮

Ομοίως, απο πυκνότητα, $\exists$ q_n ρητός τ.ω

$q_n \in (a-\frac{1}{n}, a)$

Επαγωγικά, $\exists$ (q_n) ακολουθία ρητών αριθμών τ.ω $a-\frac{1}{n} < q_n < a$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Παίρνοντας όριο για $n \to \infty$, απ' το Θεώρημα ισοσύγκλισης, επειδή $a-\frac{1}{n} \to a$

Έπεται ότι $q_n \to a$.

ii) Έστω f συνεχής στο $x_0 = \sqrt{2}$ (*)

Τότε, επιλέγοντας ακολουθία $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$

ρητών αριθμών, τέτοια ώστε

$q_n \xrightarrow{n} x_0 = \sqrt{2}$ (βλ. ερώτημα (i))

Απ' την υπόθεση (*) και την Αρχή Μεταφοράς $\Rightarrow$

$f(q_n) \longrightarrow f(\sqrt{2}) = 2$

Άρα, έχουμε ότι το όριο της $(f(q_n))$ υπάρχει

Από την άλλη μεριά, $f(q_n) = 0 \xrightarrow{n} 0$

και $f(q_n) \xrightarrow{n} 2$, άτοπο. $\square$

Θέμα 3.

Θέλουμε νδο $\exists\, x_0 \geq 1$ τ.ω $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \geq 1$

Εφόσον $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\exists\, r > 1$ τ.ω

$f(x) < f(1)$, $\forall\, x > r$

Επιπλέον, η f είναι συνεχής στο $[1, r]$.

Οπότε, $\exists\, x_0 \in [1, r]$ τ.ω $f(x) \leq \underbrace{f(x_0)}_{\max f}$,

$\forall\, x \in [1, r]$.

Συνεπώς, για καθε $x \in [1, r]$ ισχυει:

$f(x) < f(1) \leq f(x_0)$ επειδή $1 \in [1, r]$ και εκεί η f έχει μεγιστο.

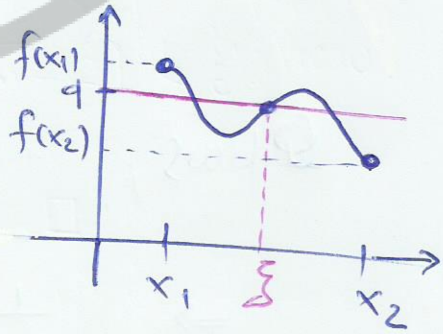
$\square$

Θεμα 4

Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι σταθερή

Άρα, $\exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ (ας πούμε ότι $x_1 < x_2$) τ.ω $f(x_1) \neq f(x_2)$, και $f(x_1), f(x_2) \notin \mathbb{Q}$

Επιλέγουμε έναν ρητό αριθμό q ανάμεσα στα $f(x_1)$ και $f(x_2)$. Ούσα, η f συνεχής συνάρτηση από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής το q πιάνεται σαν τιμή της f στο διάστημα (x_1, x_2). Δηλ. $\exists\, \xi \in (x_1, x_2)$ τ.ω $f(\xi) = q$. Άτοπο



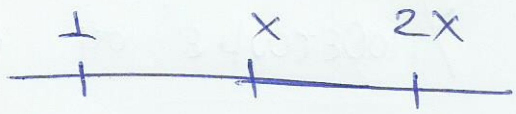
γιατί $f(\xi) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

και $q \in \mathbb{Q}$.

$\square$

Θέμα 5

Έστω $x>1$



Τότε, $2x>1$

Απ' το ΘΜΤ (Lagrange) στο $[x,2x]$

$\exists\ \xi_x \in (x,2x)$ τ.ω

$$f(2x)-f(x)=f'(\xi_x)(2x-x)$$

$$=x\cdot f'(\xi_x)$$

$$\Rightarrow |f(2x)-f(x)| = x\,|f'(\xi_x)| \overset{\text{υποθ}}{\leq} x\cdot\frac{1}{\xi_x^2} \quad (1)$$

Όμως, $1<x<\xi_x<2x \Rightarrow x^2<\xi_x^2<4x^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{4x^2}<\frac{1}{\xi_x^2}<\frac{1}{x^2}$$

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝ/ΝΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ (MSC)

Οπότε, η (1) γίνεται:

$$|f(2x)-f(x)| < x\cdot\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}, \quad \forall x>1$$

Για $x\to+\infty$:

$$0 \leq \lim_{x\to+\infty}|f(2x)-f(x)| \leq \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Οπότε, απ' το Θεώρημα Ισοσυγκλισης, έπεται

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(2x)-f(x)\right)=0$$

□